数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問（配点　30）

〔１〕 実数 x，y は

$$3^{1+\log_{10}x} - 5^y = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たしている。このとき

$$K = \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10}x}$$

の最小値を求めよう。

真数の条件により $x >$ $\boxed{\text{ア}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。次に，$(*)$ より

$$5^y = \boxed{\text{イ}} \cdot 3^{\log_{10}x} - 1$$

である。$z = 3^{\log_{10}x}$ とおくと，$5^y > 0$ であるから，z のとり得る値の範囲は

$$z > \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。さらに

$$K = z + \frac{\boxed{\text{オ}}}{z} - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}$$

となるから，K は $z = \boxed{\text{キ}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。このとき，$x = \boxed{\text{コ}}$，$y = \log_{\boxed{\text{サ}}} \boxed{\text{シ}}$ である。

（数学Ⅱ第１問は６ページに続く。）

〔2〕 aを正の定数とする。点Oを原点とする座標平面において，中心がOで，半径が1の円と半径が2の円をそれぞれC_1，C_2とする。$\theta \geqq 0$を満たす実数θに対して，角$a\theta$の動径とC_1との交点をPとし，角$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}$の動径と$C_2$との交点をQとする。ここで，動径はOを中心とし，その始線はx軸の正の部分とする。

(1) $\theta=\pi$のとき，Qの座標は$\left(\sqrt{\boxed{\text{ス}}},\ \boxed{\text{セ}}\right)$である。

(2) 3点O，P，Qがこの順に一直線上にあるような最小のθの値は

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a+\boxed{\text{チ}}}\pi$$

である。θが

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a+\boxed{\text{チ}}}\pi$$

の範囲を動くとき，円C_2において点Qの軌跡を弧とする扇（おうぎ）形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}\,a+\boxed{\text{ト}}}\pi$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(3) 線分 PQ の長さの 2 乗 PQ^2 は

$$\boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sin\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}\,a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\theta\right)$$

である。

(4) x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sin\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}\,a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}x\right)$$

とおき，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものが 4π であるとすると，

$$a = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$ である。

数学Ⅱ

第2問 (配点　30)

a を正の実数とし，x の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 3ax - 2a^2$$

とする。また，放物線 $y = f(x)$ および $y = g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。

(1)　C_1 と C_2 の共有点をPとすると，点Pの座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a,\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}a^2\right)$

である。また，点Pにおける C_1 の接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}ax - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}a^2$$

である。

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。また，C_2 と x 軸の交点の x 座標は $\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シス}}$ であり，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(3)　$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，二つの放物線 C_1，C_2 と 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた図形を R とする。R の中で，$y \geqq 0$ を満たすすべての部分の面積 $S(a)$ は

$0 < a \leqq \boxed{\text{タ}}$ のとき　$S(a) = -\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3 + \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

$\boxed{\text{タ}} < a \leqq \boxed{\text{チ}}$ のとき

$$S(a) = -\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a^3 + \boxed{\text{ト}}\,a^2 - \boxed{\text{ナ}}\,a + \boxed{\text{ニ}}$$

$\boxed{\text{チ}} < a$ のとき　$S(a) = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

である。したがって，a が $a>0$ の範囲を動くとき，$S(a)$ は $a = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ で

最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとる。

第3問 (配点 20)

座標平面上の円 $x^2+y^2=10$ を C とし，x の関数 $y=|k(x-2)|-4$ のグラフを G とする。ただし，$k>0$ である。このとき，C と G の共有点の個数について考えよう。

(1) グラフ G は直線 $x=\boxed{\text{ア}}$ に関して対称であり，k の値にかかわらず点 $\mathrm{A}\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\right)$ を通る。

点Aを通り C に接する直線を ℓ とする。ℓ の方程式を求めよう。接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，ℓ の方程式は

$$\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}\,y=10$$

と表される。点Aは ℓ 上にあり，点Pは C 上にあるので

$$\begin{cases}\boxed{\text{キ}}\,a-\boxed{\text{ク}}\,b=10\\ a^2+b^2=10\end{cases}$$

が成り立つ。したがって，接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{ケ}}\,x-\boxed{\text{コサ}}\quad\text{または}\quad y=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(x+\boxed{\text{ソタ}}\right)$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(2) C と G の共有点が 2 個となるような k の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} < k < \boxed{\text{テ}}$$

である。

(3) C と G の共有点が 3 個となるような k の値は $k = \boxed{\text{ト}}$ である。このとき，3 個のうち 2 個の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} \boxed{\text{ナ}}\,x + y = \boxed{\text{ニ}} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

を解くことにより得られる。したがって，3 個の共有点の x 座標は

$$\boxed{\text{ヌ}},\quad \frac{\boxed{\text{ネ}} \pm \boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる。

数学Ⅱ

第4問　（配点　20）

a を実数とし，x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + (a-1)x^2 - (a+2)x - 6a + 8$$

とする。

(1)　$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは $\boxed{\text{アイ}}$ である。

また，x の方程式 $P(x) = 0$ は a の値にかかわらず整数の解 $x = \boxed{\text{ウエ}}$ をもつ。したがって，$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = \left(x + \boxed{\text{オ}}\right)\left\{x^2 + \left(a - \boxed{\text{カ}}\right)x - \boxed{\text{キ}}\,a + \boxed{\text{ク}}\right\}$$

となる。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(2) 方程式 $P(x)=0$ の解がすべて実数となるような a の値の範囲は，
$a \leqq$ $\boxed{\text{ケコ}}$ または $a \geqq$ $\boxed{\text{サ}}$ である。このとき，異なる実数解の個数がちょうど2個となるような a の値は $a=$ $\boxed{\text{ケコ}}$ ，$\boxed{\text{サ}}$ ，$\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(3) $\boxed{\text{ケコ}} < a < \boxed{\text{サ}}$ ならば方程式 $P(x)=0$ は虚数解をもつ。このとき，方程式 $P(x)=0$ の二つの虚数解を α，β とする。α^2，β^2 が x の方程式

$$4x^2 - kx + 5k = 0$$

の解となるような a と定数 k の値は

$$a = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\quad k = \boxed{\text{チ}}$$

である。